INTEGRAL DEFINIDA

Ejercicio nº 1.-

Mediante los métodos de la integral definida y geometría elemental calcula el área limitada por las rectas $y = \frac{x}{2} + 1$, $x = 2$, $x = 7$ y el eje de abscisas.

Ejercicio nº 2.-

Halla gráficamente la siguiente integral:

$$\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx$$

Ejercicio nº 3.-

Calcula el área del recinto comprendido entre el eje de abscisas, el eje de ordenadas, y la recta que pasa por el punto $P(2, 3)$ y tiene de pendiente $m = -2$, mediante los métodos de la integral definida y de la geometría elemental.

Ejercicio nº 4.-

Halla el área limitada por la recta $x + y = 5$, el eje abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 4$, mediante la integral definida y por la geometría elemental.

Ejercicio nº 5.-

Calcula gráficamente la siguiente integral:

$$\int_{-1}^{1} \left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right) dx$$

Teorema fundamental del cálculo

Ejercicio nº 6.-

Dada la función $F(x) = \int sen^2 t\, dt$. Obtén los posibles puntos extremos de esta función en $[0, 2\pi]$.

Ejercicio nº 7.-

Dada la función $F(x) = \int sen^2 t\, dt$. Obtén los posibles puntos extremos de esta función en $[0, 2\pi]$.

Ejercicio nº 8.-

Calcula $F'(x)$, siendo $F(x) = \int_1^x \left(sen^2 t + \log t\right) \cdot dt$

Ejercicio nº 9.-

Dada la función:

$$F(x) = \int_0^x \left(1 + \cos^2 t\right) dt$$

Calcula $F'(x)$

Ejercicio nº 10.-

Sin necesidad de resolver la integral, indica dónde hay máximo o mínimo relativo en la función:

$$F(x)=\int_1^x (\ln t-2)\,dt$$

Regla de Barrow

Ejercicio nº 11.-

Halla el área limitada por la parábola $y = x^2 - 7x + 6$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$, $x = 6$.

Ejercicio nº 12.-

Halla el área limitada por las parábolas $y = 6x - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

Ejercicio nº 13.-

Calcula el área limitada por la curva $xy = 36$, el eje de abscisas y las rectas $x = 3$, $x = 12$.

Ejercicio nº 14.-

Halla el área limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = x + 6$.

Ejercicio nº 15.-

Calcula el área del recinto limitado por la función $y=2\sqrt{x}$ y las rectas $x=1$ y $x=2$.

Ejercicio nº 16.-

Halla el área limitada por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$.

Ejercicio nº 17.-

Halla el área limitada por la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje de abscisas.

Ejercicio nº 18.-

Calcula el área limitada por la parábola $y = x^2 - 4x$ y la recta $y = 3x - 6$.

Ejercicio nº 19.-

Halla el área del recinto limitado por la curva $y = (x - 1) \cdot (x + 2)$, las rectas $x = 3$, $x = 2$ y el eje de abscisas.

Ejercicio nº 20.-

Calcula el área limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = |x - 2|$.

Cálculo de áreas y volúmenes

Ejercicio nº 21.-

Calcula el volumen engendrado por la curva $y^2 = 8x$ y la recta $x = 2$ al girar alrededor del eje X.

Ejercicio nº 22.-

Demuestra mediante el cálculo integral la fórmula del área de un rectángulo.

Ejercicio nº 23.-

Halla, mediante el cálculo integral, el volumen de un elipsoide de radios 3 cm y 4 cm.

Ejercicio nº 24.-

Halla el volumen del cuerpo engendrado por la elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ al girar alrededor del eje X.

Ejercicio nº 25.-

Deduce mediante el cálculo integral la fórmula del área de un trapecio.

Ejercicio nº 26.-

Calcula, mediante el cálculo integral, el volumen de un tronco de cono de radios 3 cm y 5 cm, y altura 6 cm.

Ejercicio nº 27.-

Halla el volumen engendrado por el trapecio limitado por las rectas $x = 0$, $x = 5$, $y = 0$, $x - 5y + 10 = 0$ al girar alrededor del eje X.

Ejercicio nº 28.-

Obtén, utilizando el cálculo integral, el área de un trapecio de bases 3 cm y 5 cm, y de altura 4 cm.

Ejercicio nº 29.-

Utilizando el cálculo integral, calcula el volumen de un cono de radio 5 m y altura 10 m.

Ejercicio nº 30.-

Calcula el volumen engendrado por la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ al girar alrededor del eje X.

Ejercicio nº 31.-

Demuestra, utilizando el cálculo integral, que el área de un triángulo rectángulo de base 3 m y altura 5 m es 7,5 m^2.

Ejercicio nº 32.-

Utilizando el cálculo integral, obtén el volumen de una esfera de radio 2 cm.

Ejercicio nº 33.-

Halla el volumen engendrado al girar alrededor del eje X el recinto limitado por $y^2 = 2x$, $x = 1$, $x = 2$.

Ejercicio nº 34.-

Obtén la fórmula del área de un triángulo rectángulo mediante el cálculo integral.

Ejercicio nº 35.-

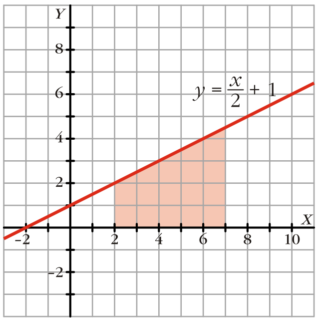
Obtén, mediante el cálculo integral, el volumen de un cilindro de radio 3 cm y altura 5 cm.

SOLUCIONES EJERCICIOS INTEGRAL DEFINIDA

Ejercicio nº 1.-

Mediante los métodos de la integral definida y geometría elemental calcula el área limitada por las rectas $y = \frac{x}{2} + 1,\ x = 2,\ x = 7$ y el eje de abscisas.

Solución:



$$A = \int_2^7 \left(\frac{x}{2} + 1\right) dx = \left[\frac{x^2}{4} + x\right]_2^7 = \frac{77}{4} - 3 = \frac{65}{4}\ \text{u}^2$$

Geométricamente, se trata de un trapecio:

$$A = \frac{\left(\frac{9}{2} + 2\right) \cdot 5}{2} = \frac{\frac{13}{2} \cdot 5}{2} = \frac{65}{4}\ \text{u}^2$$

Ejercicio nº 2.-

Halla gráficamente la siguiente integral:

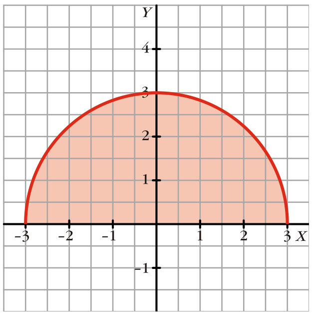
$$\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx$$

Solución:

$$y = \sqrt{9 - x^2} \quad \rightarrow \quad y^2 = 9 - x^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 9 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 3^2 \quad \text{(circunferencia)}$$

El recinto cuya área queremos calcular es medio círculo de radio 3 u.

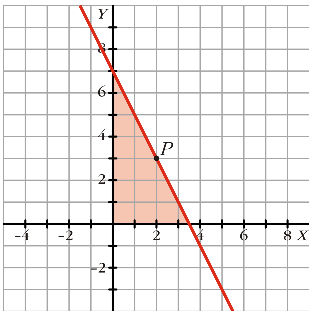
$$Área = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 = \frac{9}{2}\pi\ \text{u}^2$$



Ejercicio nº 3.-

Calcula el área del recinto comprendido entre el eje de abscisas, el eje de ordenadas, y la recta que pasa por el punto *P* (2, 3) y tiene de pendiente *m* = –2, mediante los métodos de la integral definida y de la geometría elemental.

Solución:



La ecuación de la recta que pasa por *P* (2, 3) y tiene de pendiente $m = -2$ es:

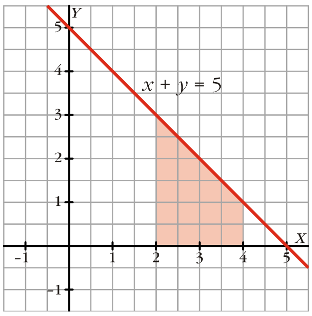
$$y - 3 = -2 \cdot (x - 2) \quad \rightarrow \quad y = -2x + 7$$

$$A = \int_0^{\frac{7}{2}} (-2x + 7) \cdot dx = \left[-\frac{2x^2}{2} + 7x \right]_0^{\frac{7}{2}} = \left[-x^2 + 7x \right]_0^{7/2} = \frac{49}{4} \text{ u}^2$$

Ejercicio nº 4.-

Halla el área limitada por la recta $x + y = 5$, el eje abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 4$, mediante la integral definida y por la geometría elemental.

Solución:



$$A = \int_2^4 (5 - x) \cdot dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} \right]_2^4 = (20 - 8) - (10 - 2) = 12 - 8 = 4 \text{ u}^2$$

Geométricamente, se trata de un trapecio:

$$A = \frac{(3 + 1) \cdot 2}{2} = 4 \text{ u}^2$$

Geométricamente, se trata de un triángulo:

$$A = \frac{\frac{7}{2} \cdot 7}{2} = \frac{49}{4} \text{ u}^2$$

Ejercicio nº 5.-

Calcula gráficamente la siguiente integral:

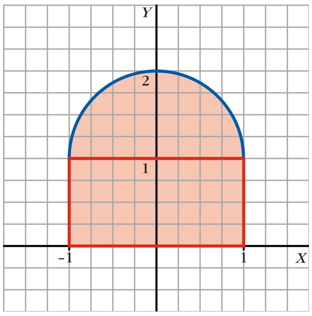
$$\int_{-1}^{1}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)dx$$

Solución:

$$y=\sqrt{1-x^2} \quad \rightarrow \quad x^2+y^2=1^2 \quad \text{(Circunferencia)}$$

Se trata de un rectángulo de base 2u y altura 1u más media circunferencia de radio 1u.

$$Área = 2\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1^2 = 2+\frac{\pi}{2}\ \text{u}^2$$



Teorema fundamental del cálculo

Ejercicio nº 6.-

Dada la función $F(x)=\int sen^2 t\, dt$. Obtén los posibles puntos extremos de esta función en [0, 2π].

Solución:

Aplicando el teorema fundamental del cálculo:

$$F'(x) = sen^2 x$$

$$F'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad sen^2 x = 0 \quad \rightarrow \quad x=0, \quad x=\pi \quad \text{y} \quad x=2\pi.$$

Ejercicio nº 7.-

Dada la función $F(x)=\int sen^2 t\, dt$. Obtén los posibles puntos extremos de esta función en [0, 2π].

Solución:

Aplicando el teorema fundamental del cálculo:

$$F'(x) = sen^2 x$$

$$F'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad sen^2 x = 0 \quad \rightarrow \quad x=0, \quad x=\pi \quad \text{y} \quad x=2\pi.$$

Ejercicio nº 8.-

Calcula $F'(x)$, siendo $F(x) = \int_1^x \left(sen^2 t + \log t\right) \cdot dt$

Solución:

Aplicando el teorema fundamental del cálculo:

$F'(x) = sen^2 x + log x$

Ejercicio nº 9.-

Dada la función:

$$F(x) = \int_0^x \left(1 + \cos^2 t\right) dt$$

Calcula $F'(x)$.

Solución:

Por el teorema fundamental del cálculo:

$F'(x) = f(x) = 1 + \cos^2 x$

Ejercicio nº 10.-

Sin necesidad de resolver la integral, indica dónde hay máximo o mínimo relativo en la función:

$$F(x) = \int_1^x \left(\ln t - 2\right) dt$$

Solución:

Aplicando el teorema fundamental del cálculo:

$F'(x) = \ln x - 2$

$F'(x) = 0 \;\rightarrow\; \ln x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = e^2$

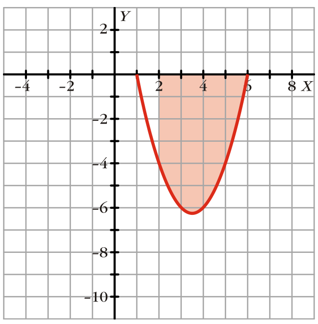
En $x = e^2$ tiene un mínimo (pues $F''(e^2) > 0$).

Regla de Barrow

Ejercicio nº 11.-

Halla el área limitada por la parábola $y = x^2 - 7x + 6$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$, $x = 6$.

Solución:



(La gráfica no es necesaria; se incluye para visualizar mejor el problema).

$$G(x)=\int\left(x^2-7x+6\right)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}+6x$$

$$G(6) = 72 - 126 + 36 = -18$$

$$G(2)=\frac{8}{3}-14+12=\frac{2}{3}$$

$$G(6)-G(2)=-18-\frac{2}{3}=-\frac{56}{3}$$

$$A=\left|-\frac{56}{3}\right|=\frac{56}{3}\ \text{u}^2$$

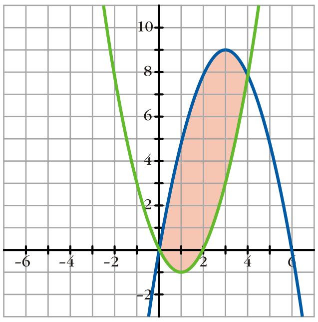
<u>Ejercicio nº 12.-</u>

Halla el área limitada por las parábolas $y = 6x - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

Solución:

Los puntos de intersección de ambas curvas son:

$6x - x^2 = x^2 - 2x \rightarrow x = 0,\ x = 4 \rightarrow (0, 0)$ y $(4, 8)$



(La gráfica no es necesaria; se incluye para visualizar mejor el problema)

$$G(x)=\int\left[\left(6x-x^2\right)-\left(x^2-2x\right)\right]dx=\int\left(-2x^2+8x\right)dx=\frac{-2x^3}{3}+4x^2$$

$$G(0) = 0$$

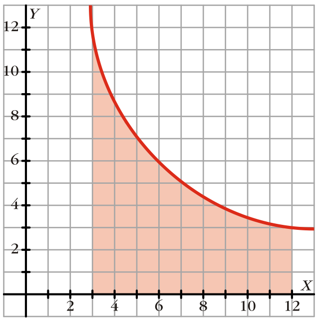
$$G(4)=\frac{-128}{3}+64=\frac{64}{3}$$

$$A=G(4)-G(0)=\frac{64}{3}\ \text{u}^2$$

<u>Ejercicio nº 13.-</u>

Calcula el área limitada por la curva $xy = 36$, el eje de abscisas y las rectas $x = 3$, $x = 12$.

Solución:



(La gráfica no es necesaria; se incluye para visualizar mejor el problema).

$$G(x) = \int \frac{36}{x}\, dx = 36 \cdot ln|x|$$

$$G(3) = 36 \cdot ln3$$

$$G(12) = 36 \cdot ln12$$

$$G(12) - G(3) = 36 \cdot (ln12 - ln3) = 36 \cdot ln4$$

$$A = 36 \cdot ln4 \text{ u}^2$$

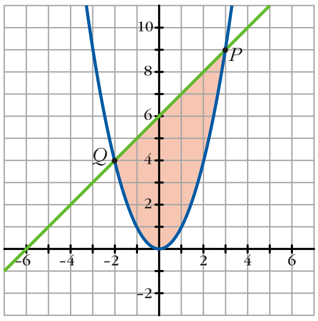
<u>Ejercicio nº 14.-</u>

Halla el área limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = x + 6$.

Solución:

Los puntos de intersección son:

$$x^2 = x + 6 \quad \to \quad P\ (3,\ 9),\ \ Q\ (-2,\ 4)$$



(La gráfica no es necesaria; se incluye para visualizar mejor el problema)

$$G(x) = \int \left(x + 6 - x^2\right) dx = \frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}$$

$$G(-2) = -10 + \frac{8}{3} = \frac{-22}{3}$$

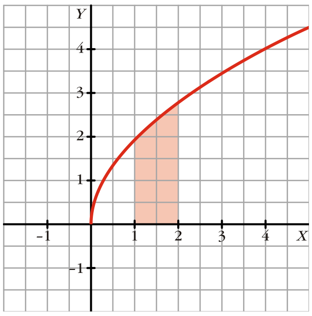
$$G(3) = \frac{9}{2} + 18 - 9 = \frac{27}{2}$$

$$G(3) - G(-2) = \frac{27}{2} + \frac{22}{3} = \frac{125}{6} \text{ u}^2 = A$$

Ejercicio nº 15.-

Calcula el área del recinto limitado por la función $y = 2\sqrt{x}$ y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:



(La gráfica no es necesaria; se incluye para visualizar mejor el problema).

$$G(x) = \int 2 \cdot \sqrt{x}\ dx = \frac{4}{3}\sqrt{x^3}$$

$$G(1) = \frac{4}{3}$$

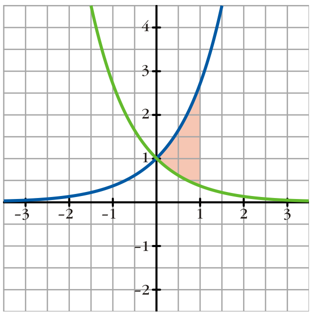
$$G(2) = \frac{8}{3} \cdot \sqrt{2}$$

$$G(2) - G(1) = \frac{8}{3}\sqrt{2} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \cdot \left(2\sqrt{2} - 1\right)\ \text{u}^2$$

Ejercicio nº 16.-

Halla el área limitada por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$.

Solución:



(La gráfica no es necesaria; se incluye para visualizar mejor el problema).

$$G(x) = \int \left(e^x - e^{-x}\right) dx = e^x + e^{-x}$$

$$G(0) = 2$$

$$G(1) = e + \frac{1}{e} = \frac{e^2 + 1}{e}$$

$$G(1) - G(0) = \frac{e^2 + 1}{e} - 2 = \frac{e^2 - 2e + 1}{e}$$

$$A = \frac{e^2 - 2e + 1}{e}\ \text{u}^2$$

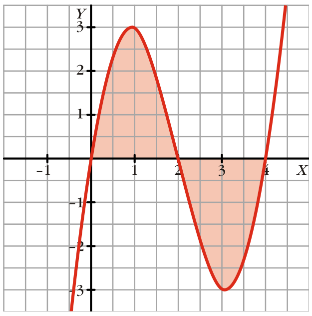
Ejercicio nº 17.-

Halla el área limitada por la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje de abscisas.

Solución:

La curva corta al eje de abscisas en los puntos:

$x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0,\ x = 2,\ x = 4$



(La gráfica no es necesaria; se incluye para visualizar mejor el problema).

$$G(x) = \int \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2$$

$G(0) = 0$

$G(2) = 4 - 16 + 16 = 4$

$G(4) = 64 - 128 + 64 = 0$

$G(2) - G(0) = 4$

$G(4) - G(2) = -4$

$A = 4 + |-4| = 8\ \text{u}^2$

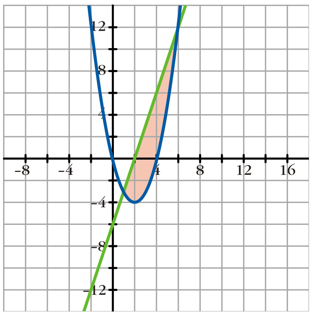
Ejercicio nº 18.-

Calcula el área limitada por la parábola $y = x^2 - 4x$ y la recta $y = 3x - 6$.

Solución:

Los puntos de intersección son:

$x^2 - 4x = 3x - 6 \quad \rightarrow \quad x = 1,\ \ x = 6 \quad \rightarrow \quad (1, -3)\ \text{ y }\ (6, 12)$



(La gráfica no es necesaria; se incluye para visualizar mejor el problema)

$$G(x) = \int (3x - 6 - x^2 + 4x)\, dx = \int (-x^2 + 7x - 6)\, dx = \frac{-x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 6x$$

$$G(1) = \frac{-1}{3} + \frac{7}{2} - 6 = \frac{-17}{6}$$

$$G(6) = -72 + 126 - 36 = 18$$

$$G(6) - G(1) = 18 + \frac{17}{6} = \frac{125}{6}$$

$$A = \frac{125}{6}\ \text{u}^2$$

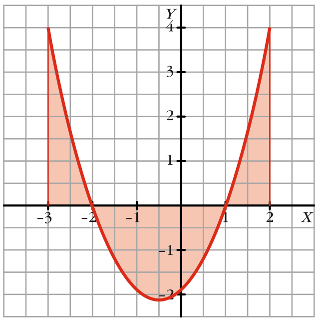
<u>Ejercicio nº 19.-</u>

Halla el área del recinto limitado por la curva $y = (x - 1) \cdot (x + 2)$, las rectas $x = 3$, $x = 2$ y el eje de abscisas.

Solución:

La curva corta al eje de abscisas en:

$$(x - 1) \cdot (x + 2) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1 \;\; \text{y} \;\; x = -2$$



(La gráfica no es necesaria; se incluye para visualizar mejor el problema).

$$G(x) = \int (x-1)(x+2)\, dx = \int (x^2 + x - 2)\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$$

$$G(-3) = \frac{-27}{3} + \frac{9}{2} + 6 = \frac{3}{2}$$

$$G(-2) = \frac{-8}{3} + 2 + 4 = \frac{10}{3}$$

$$G(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{-7}{6}$$

$$G(2)=\frac{8}{3}+2-4=\frac{2}{3}$$

$$G(-2)-G(-3)=\frac{10}{3}-\frac{3}{2}=\frac{11}{6}$$

$$G(1)-G(-2)=\frac{-7}{6}-\frac{10}{3}=\frac{-27}{6}=\frac{-9}{2}$$

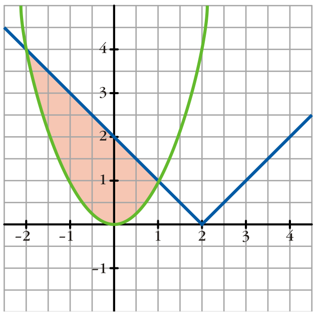
$$G(2)-G(1)=\frac{2}{3}+\frac{7}{6}=\frac{11}{6}$$

$$A=\frac{11}{6}+\left|\frac{-9}{2}\right|+\frac{11}{6}=\frac{49}{6}\ \text{u}^2$$

Ejercicio nº 20.-

Calcula el área limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = |x - 2|$.

Solución:



(La gráfica no es necesaria; se incluye para visualizar mejor el problema).

$$y=x^2$$

$$y=|x-2|=\begin{cases}-x+2 & \text{si} \quad x<2\\ x-2 & \text{si} \quad x\geq 2\end{cases}$$

Puntos de intersección:

$$x^2=-x+2 \quad\rightarrow\quad x^2+x-2=0 \quad \begin{cases}x=1\\ x=-2\end{cases}$$

$x^2 = x - 2 \quad\rightarrow\quad x^2 - x + 2 = 0$ No tiene solución

$$G(x)=\int\left(-x+2-x^2\right)dx=-\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}$$

$$G(1)=-\frac{1}{2}+2-\frac{1}{3}=\frac{7}{6}$$

$$G(-2)=-2-4+\frac{8}{3}=-\frac{10}{3}$$

$$G(1)-G(-2)=\frac{7}{6}+\frac{10}{3}=\frac{27}{6}=4{,}5$$

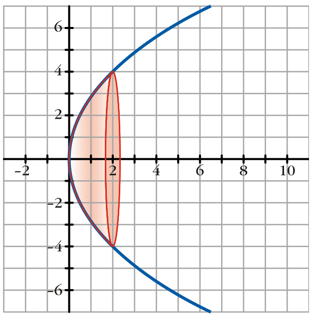
Área $= 4{,}5\ \text{u}^2$

Cálculo de áreas y volúmenes

Ejercicio nº 21.-

Calcula el volumen engendrado por la curva $y^2 = 8x$ y la recta $x = 2$ al girar alrededor del eje X.

Solución:



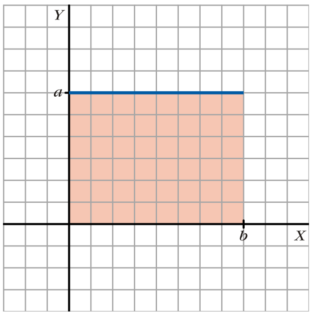
$$V = \pi \cdot \int_0^2 8x\, dx = 8\pi \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 16\pi \text{ u}^3$$

Ejercicio nº 22.-

Demuestra mediante el cálculo integral la fórmula del área de un rectángulo.

Solución:

Calculemos el área bajo la recta $y = a$ entre $x = 0$ y $x = b$.



$$A = \int_0^b a\, dx = [a \cdot x]_0^b = a \cdot b$$

Ejercicio nº 23.-

Halla, mediante el cálculo integral, el volumen de un elipsoide de radios 3 cm y 4 cm.

Solución:

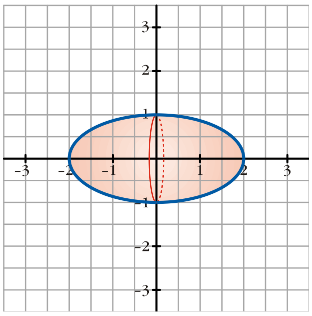
El volumen buscado es el engendrado por la curva $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ al girar alrededor del eje X entre $x = -3$ y $x = 3$.

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot \int_{-3}^{3} \left(1 - \frac{x^2}{9} \right) dx = 16\pi \cdot \left[x - \frac{x^3}{27} \right]_{-3}^{3} = 16\pi \cdot [3 - 1 + 3 - 1] = 64\pi \text{ cm}^3$$

Ejercicio nº 24.-

Halla el volumen del cuerpo engendrado por la elipse $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ al girar alrededor del eje X.

Solución:

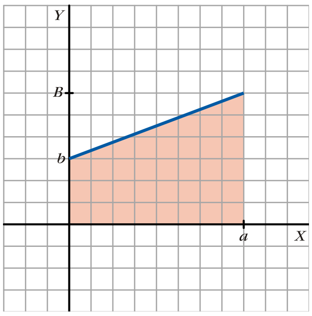


$$V=\pi\cdot\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx=2\pi\cdot\int_{0}^{2}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx=2\pi\cdot\left[x-\frac{x^3}{12}\right]_0^2=2\pi\cdot\left(\frac{16}{12}\right)=\frac{8}{3}\pi\ \text{u}^3$$

Ejercicio nº 25.-

Deduce mediante el cálculo integral la fórmula del área de un trapecio.

Solución:



La recta que pasa por $(0, b)$ y (a, B) es:

$$y=\frac{B-b}{a}\,x+b$$

Así:

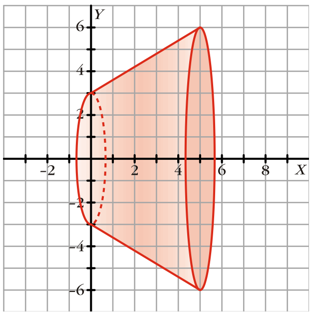
$$A=\int_0^a\left(\frac{B-b}{a}\,x+b\right)dx=\left[\frac{B-b}{2a}\cdot x^2+bx\right]_0^a=\frac{B-b}{2}\cdot a+b\cdot a=\frac{B+b}{2}\cdot a$$

Ejercicio nº 26.-

Calcula, mediante el cálculo integral, el volumen de un tronco de cono de radios 3 cm y 5 cm, y altura 6 cm.

Solución:

El volumen buscado es el engendrado por la recta $y = \frac{1}{3}x + 3$ al girar alrededor del eje X entre $x = 0$ y $x = 6$.

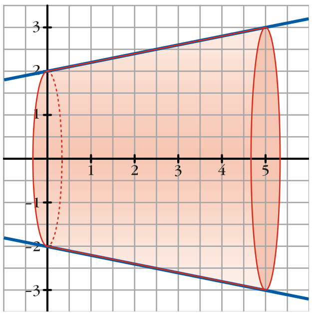


$$V = \pi \cdot \int_0^6 \left(\frac{1}{3}x + 3 \right) dx = \pi \left[\frac{1}{3} \frac{x^2}{2} + 3x \right]_0^6 = 24\pi \text{ cm}^3$$

<u>Ejercicio nº 27.-</u>

Halla el volumen engendrado por el trapecio limitado por las rectas $x = 0$, $x = 5$, $y = 0$, $x - 5y + 10 = 0$ al girar alrededor del eje X.

Solución:



$$V = \pi \cdot \int_0^5 \left(\frac{x+10}{5} \right)^2 dx = \frac{\pi}{25} \int_0^5 (x+10)^2 dx = \frac{\pi}{25} \cdot \left[\frac{(x+10)^3}{3} \right]_0^5 = \frac{\pi}{75} \cdot (3375 - 1000) =$$

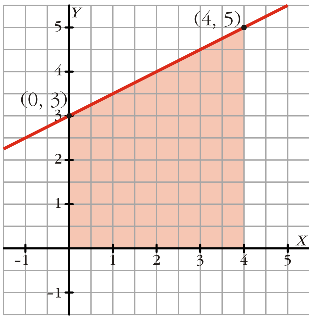
$$= \frac{2375}{75} \pi = \frac{95\pi}{3} \text{ u}^3$$

<u>Ejercicio nº 28.-</u>

Obtén, utilizando el cálculo integral, el área de un trapecio de bases 3 cm y 5 cm, y de altura 4 cm.

Solución:

Se trata de hallar el área comprendida entre la recta que pasa por los puntos $(0, 3)$ y $(4, 5)$ y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.



La recta que pasa por $(0,\ 3)$ y $(4,\ 5)$ es $y=\frac{1}{2}x+3.$

$$A=\int_0^4\left(\frac{1}{2}x+3\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^2+3x\right]_0^4=16\ \text{cm}^2$$

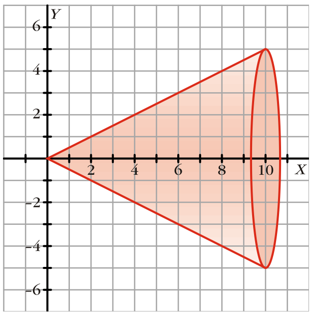
Ejercicio nº 29.-

Utilizando el cálculo integral, calcula el volumen de un cono de radio 5 m y altura 10 m.

Solución:

El volumen buscado es el engendrado por la recta $y=\frac{1}{2}x$ al girar alrededor del eje X

$x=0$ y $x=10.$

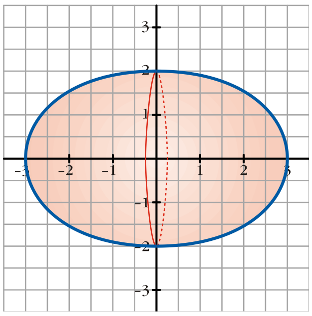


$$V=\pi\cdot\int_0^{10}\left(\frac{1}{2}x\right)^2dx=\pi\cdot\left[\frac{x^3}{12}\right]_0^{10}=\frac{1000}{12}\pi=\frac{250}{3}\pi\ \text{m}^3$$

Ejercicio nº 30.-

Calcula el volumen engendrado por la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ al girar alrededor del eje X.

Solución:



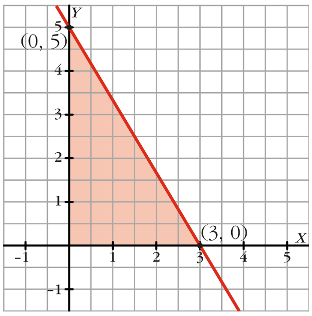
$$V=\pi\cdot\int_{-3}^{3}4\cdot\left(1-\frac{x^2}{9}\right)dx=2\pi\int_0^3 4\left(1-\frac{x^2}{9}\right)dx=8\pi\cdot\left[x-\frac{x^3}{27}\right]_0^3=8\pi\ (3-1)=16\pi\ \text{u}^3$$

Ejercicio nº 31.-

Demuestra, utilizando el cálculo integral, que el área de un triángulo rectángulo de base 3 m y altura 5 m es 7,5 m^2.

Solución:

Se trata de hallar el área limitada por la recta que pasa por los puntos (0, 5) y (3, 0) y los ejes de coordenadas.



La recta que pasa por $(0, 5)$ y $(3, 0)$ es $y = \frac{-5}{3}x + 5.$

$$A = \int_0^3 \left(\frac{-5}{3}x + 5\right) dx = \left[\frac{-5}{6}x^2 + 5x\right]_0^3 = \frac{-15}{2} + 15 = \frac{15}{2} = 7{,}5 \text{ m}^2$$

Ejercicio nº 32.-

Utilizando el cálculo integral, obtén el volumen de una esfera de radio 2 cm.

Solución:

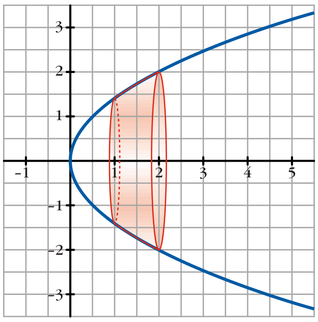
El volumen buscado es el engendrado por la curva $y^2 = 4 - x^2$ al girar alrededor del eje X entre $x = -2$ y $x = 2$.

$$V = \pi \cdot \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx = \pi \cdot \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \pi \cdot \left(8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3}\right) = \pi \cdot \frac{32}{3} = \frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Ejercicio nº 33.-

Halla el volumen engendrado al girar alrededor del eje X el recinto limitado por $y^2 = 2x$, $x = 1$, $x = 2$.

Solución:

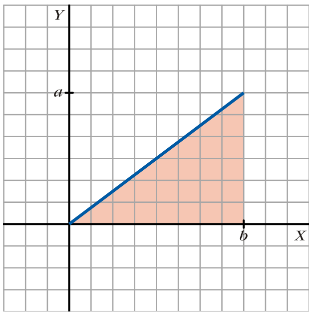


$$V = \pi \cdot \int_1^2 2 \cdot x \, dx = \pi \cdot \left[x^2\right]_1^2 = 3\pi \text{ u}^3$$

Ejercicio nº 34.-

Obtén la fórmula del área de un triángulo rectángulo mediante el cálculo integral.

Solución:



La recta tiene por ecuación $y = \frac{a}{b} x$.

Así:

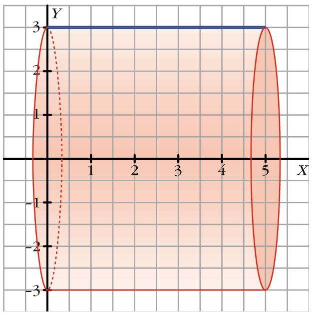
$$A = \int_0^b \frac{a}{b} \cdot x \, dx = \left[\frac{ax^2}{2b} \right]_0^b = \frac{a \cdot b^2}{2 \cdot b} = \frac{a \cdot b}{2}$$

Ejercicio nº 35.-

Obtén, mediante el cálculo integral, el volumen de un cilindro de radio 3 cm y altura 5 cm.

Solución:

El volumen buscado es el engendrado por la recta $y = 3$ al girar alrededor del eje X entre $x = 0$ y $x = 5$.



$$V = \pi \int_0^5 3^2 \, dx = [\pi \cdot 9x]_0^5 = 45\pi \text{ cm}^3$$